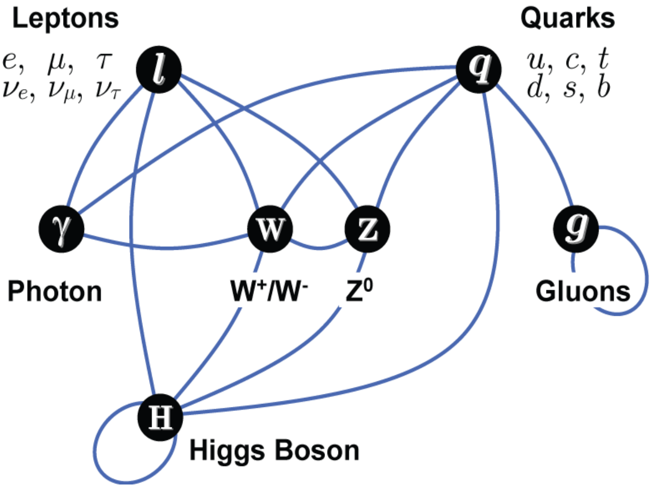
Einführung und Präzisionstest des Standardmodells

Tobias Binder

June 4, 2012

Inhaltsverzeichnis


Leptons
e, μ, τ
νe, νμ, ντ
l
Quarks
u, c, t
d, s, b
q
γ
W
Z
g
Photon
W+/W-
Z0
Gluons
H
Higgs Boson

Lagrangefunktion für ein geladenes Punktteilchen im elektromagnetischen Feld:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{X}}^2}_{L_{\text{kin}}} + \underbrace{\int \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \mathrm{d}^3 x}_{L_{\text{EM}}} \underbrace{- q\phi(\vec{X}(t), t) + q\dot{\vec{X}} \cdot \vec{A}(\vec{X}(t), t)}_{L_{\text{WW}}} .$$

Von der Dynamik von Punktteilchen zur Dynamik von klassischen Feldern:

- $L = \int \mathfrak{L} \mathrm{d}^3 x$
- $\rho = q\delta(\vec{x} - \vec{X}(t))$
- $\vec{j} = q\dot{\vec{X}}\delta(\vec{x} - \vec{X}(t))$

$$\rightarrow \mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) - \rho\phi + \vec{j}\vec{A}$$

Von der Dynamik von Punktteilchen zur Dynamik von klassischen Feldern:

- $L = \int \mathfrak{L} \mathrm{d}^3 x$
- $\rho = q\delta(\vec{x} - \vec{X}(t))$
- $\vec{j} = q\dot{\vec{X}}\delta(\vec{x} - \vec{X}(t))$

$$\to \mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) - \rho\phi + \vec{j}\vec{A}$$

Forderung: $\mathfrak{L}$ soll lorentzinvariant sein.

- Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$

Forderung: $\mathfrak{L}$ soll lorentzinvariant sein.

- Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$
- Viererstrom: $j^\mu = u^\mu q \delta(\vec{x} - \vec{X}) \rightarrow (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

Forderung: $\mathfrak{L}$ soll lorentzinvariant sein.

- Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$
- Viererstrom: $j^\mu = u^\mu q \delta(\vec{x} - \vec{X}) \;\rightarrow\; (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$
- Viererpotential: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

Forderung: $\mathfrak{L}$ soll lorentzinvariant sein.

- Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$
- Viererstrom: $j^\mu = u^\mu q \delta(\vec{x} - \vec{X}) \;\rightarrow\; (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$
- Viererpotential: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \mathfrak{L}_{\mathrm{WW}} = -\rho\phi + \vec{j}\vec{A} = -j^\mu A_\mu$$

$$\rightarrow \mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)}_{\text{lorentzinvariant???}} + \underbrace{\mathfrak{L}_{\mathrm{WW}}}_{\text{lorentzinvariant!!!}}$$

Forderung: $\mathfrak{L}$ soll lorentzinvariant sein.

- Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$
- Viererstrom: $j^\mu = u^\mu q \delta(\vec{x} - \vec{X}) \;\rightarrow\; (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$
- Viererpotential: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \mathfrak{L}_{\mathrm{WW}} = -\rho\phi + \vec{j}\vec{A} = -j^\mu A_\mu$$

$$\rightarrow \mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)}_{\text{lorentzinvariant???}} + \underbrace{\mathfrak{L}_{\mathrm{WW}}}_{\text{lorentzinvariant!!!}}$$

Forderung: $\mathfrak{L}$ soll lorentzinvariant sein.

- Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}$
- Viererstrom: $j^\mu = u^\mu q \delta(\vec{x} - \vec{X}) \rightarrow (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$
- Viererpotential: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \mathfrak{L}_{\mathrm{WW}} = -\rho\phi + \vec{j}\vec{A} = -j^\mu A_\mu$$

$$\rightarrow \mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)}_{\text{lorentzinvariant???}} + \underbrace{\mathfrak{L}_{\mathrm{WW}}}_{\text{lorentzinvariant!!!}}$$

Definition: Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\nu\mu} \text{ (antisymmetrisch)}$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \rightarrow \text{lorentzinvariant!!!}$$

Definition: Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\nu\mu} \text{ (antisymmetrisch)}$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \rightarrow \text{lorentzinvariant!!!}$$

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

$$\mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

Hamiltonsche Prinzip $\Rightarrow$ *Euler-Lagrange* Bewegungsgleichungen:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\partial_\nu F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

$$\mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

Hamiltonsche Prinzip $\Rightarrow$ *Euler-Lagrange* Bewegungsgleichungen:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\partial_\nu F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

$\rightarrow$Inhomogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

$$\mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

Hamiltonsche Prinzip $\Rightarrow$ *Euler-Lagrange* Bewegungsgleichungen:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\partial_\nu F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

$\rightarrow$Inhomogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$

$F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch $\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu j^\mu = 0$

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

$$\mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

Hamiltonsche Prinzip $\Rightarrow$ *Euler-Lagrange* Bewegungsgleichungen:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\partial_\nu F^{\mu\nu}$$
$$\frac{\partial \mathfrak{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

$\rightarrow$Inhomogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$
$F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch $\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu j^\mu = 0$

Wer oder was liefert uns die Quantenmechanik?

Schrödingers Katze ???

Diracs Katze: $\mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?

Idee:

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?
Idee:

- Leiten freie Diracgleichung aus der freien Diraclagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ ab.

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?
Idee:

- Leiten freie Diracgleichung aus der freien Diraclagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ ab.
- Suchen nach einem erhaltenen 'Diracstrom' j^{μ}.

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?
Idee:

- Leiten freie Diracgleichung aus der freien Diraclagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ ab.
- Suchen nach einem erhaltenen 'Diracstrom' j^{μ}.
- Koppeln Diracstrom ans Viererpotential A^{μ}, analog zum Wechselwirkungsterm der Elektrodynamik.

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?
Idee:

- Leiten freie Diracgleichung aus der freien Diraclagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ ab.
- Suchen nach einem erhaltenen 'Diracstrom' j^{μ}.
- Koppeln Diracstrom ans Viererpotential A^{μ}, analog zum Wechselwirkungsterm der Elektrodynamik.
- $\mathfrak{L}_{\text{QED}} = \mathfrak{L}_{\text{Dirac}} + \mathfrak{L}_{\text{WW}} + \mathfrak{L}_{\text{EM}}$

$$\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Wie koppelt man Diracteilchen ans elektromagnetische Feld?
Idee:

- Leiten freie Diracgleichung aus der freien Diraclagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ ab.
- Suchen nach einem erhaltenen 'Diracstrom' j^{μ}.
- Koppeln Diracstrom ans Viererpotential A^{μ}, analog zum Wechselwirkungsterm der Elektrodynamik.
- $\mathfrak{L}_{\text{QED}} = \mathfrak{L}_{\text{Dirac}} + \mathfrak{L}_{\text{WW}} + \mathfrak{L}_{\text{EM}}$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0 \text{ Diracgleichung}$$

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m\right) = 0 \text{ adjungierte Diracgleichung}$$

$\Rightarrow$ Erhaltener Diracstrom:

$$\partial_\mu \left(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi\right) =: \partial_\mu j^\mu = 0$$

Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi}_{\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}} + \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}}_{\mathfrak{L}_{\text{WW}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathfrak{L}_{\text{EM}}}$$

Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi}_{\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}} + \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}}_{\mathfrak{L}_{\text{WW}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathfrak{L}_{\text{EM}}}$$

Definition: Kovariante Ableitung

$$D_{\mu} := (\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x))$$

$$\Rightarrow \mathfrak{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi}_{\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}} + \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\mathfrak{L}_{\text{WW}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathfrak{L}_{\text{EM}}}$$

Definition: Kovariante Ableitung

$$D_\mu := (\partial_\mu - ieA_\mu(x))$$

$$\Rightarrow \mathfrak{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Definition: GLOBALE Eichtransformation

$$\psi(x) \to U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha}\psi(x)$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)U^\dagger(\alpha) = \bar{\psi}(x)e^{-ie\alpha}$$

Unitäre Transformation: $U^\dagger U = \mathbb{1}$

Ist $\mathfrak{L}_{\mathrm{QED}}$ invariant unter einer globalen Eichtransformation?

Definition: GLOBALE Eichtransformation

$$\psi(x) \to U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha}\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)U^\dagger(\alpha) = \bar{\psi}(x)e^{-ie\alpha}$$

Unitäre Transformation: $U^\dagger U = \mathbb{1}$

Ist $\mathfrak{L}_{\text{QED}}$ invariant unter einer globalen Eichtransformation?

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Definition: GLOBALE Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha}\psi(x)$$
$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)U^{\dagger}(\alpha) = \bar{\psi}(x)e^{-ie\alpha}$$

Unitäre Transformation: $U^{\dagger}U = \mathbb{1}$

Ist $\mathfrak{L}_{\text{QED}}$ invariant unter einer globalen Eichtransformation?

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Ja!

Definition: GLOBALE Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha}\psi(x)$$
$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)U^\dagger(\alpha) = \bar{\psi}(x)e^{-ie\alpha}$$

Unitäre Transformation: $U^\dagger U = \mathbb{1}$

Ist $\mathfrak{L}_{\text{QED}}$ invariant unter einer globalen Eichtransformation?

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Ja!

Definition: LOKALE Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$$

Ist $\mathfrak{L}_{\text{QED}}$ invariant unter einer LOKALEN Eichtransformation?

- $\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, trivial

Definition: LOKALE Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$$

Ist $\mathfrak{L}_{\text{QED}}$ invariant unter einer LOKALEN Eichtransformation?

- $\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, trivial
- $m\bar{\psi}(x)\psi(x)$, ebenfalls

Definition: LOKALE Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$$

Ist $\mathfrak{L}_{\text{QED}}$ invariant unter einer LOKALEN Eichtransformation?

- $\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, trivial
- $m\bar{\psi}(x)\psi(x)$, ebenfalls

Definition: LOKALE Eichtransformation

$$\psi(x) \to U(\alpha)\psi(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi(x) \to\ & i\bar{\psi}(x)U^{\dagger}\gamma^{\mu}D_{\mu}(U\psi(x)) \\ =\ & i\bar{\psi}(x)U^{\dagger}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x))(U\psi(x)) \\ =\ & i\bar{\psi}(x)U^{\dagger}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}U)\psi(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi(x) \\ =\ & -e\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\alpha(x))\psi(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi(x) \end{aligned}$$

Erinnerung an die Elektrodynamik:
Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt: Eichfreiheit!

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

(Physikalischen Felder bleiben unbeeinflusst $\Leftrightarrow$ $F^{\mu\nu}$ invariant)

Erinnerung an die Elektrodynamik:
Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt: Eichfreiheit!

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

(Physikalischen Felder bleiben unbeeinflusst $\Leftrightarrow$ $F^{\mu\nu}$ invariant)
Eichfreiheit der Potentiale bedeutet für die kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} D'_\mu &= \partial_\mu - ieA'_\mu(x) \\ &= D_\mu - ie\partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Erinnerung an die Elektrodynamik:
Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt: Eichfreiheit!

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

(Physikalischen Felder bleiben unbeeinflusst $\Leftrightarrow F^{\mu\nu}$ invariant)
Eichfreiheit der Potentiale bedeutet für die kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} D'_\mu &= \partial_\mu - ieA'_\mu(x) \\ &= D_\mu - ie\partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Fazit

Die Lagrangedichte der QED

$$\mathfrak{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

ist *eichinvariant* unter der lokalen Eichtransformation:

$$\psi(x)' = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \; .$$

Dabei gilt die Eichfreiheit $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$,
und die kovariante Ableitung transformiert über

$$D'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu(x)$$

- Die Menge der Transformationen $\psi(x)' = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$ bildet die Gruppe $U(1)$.
- $U(1)$ ist eine abelsche Gruppe.

- Die Menge der Transformationen $\psi(x)' = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$ bildet die Gruppe $U(1)$.
- $U(1)$ ist eine abelsche Gruppe.
- Raumzeitabhängiger Gruppenparameter $\alpha(x)$.
- $\Rightarrow$ Die Lagrangedichte der QED unterliegt einer abelschen Eichsymmetrie

- Die Menge der Transformationen $\psi(x)' = e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$ bildet die Gruppe $U(1)$.
- $U(1)$ ist eine abelsche Gruppe.
- Raumzeitabhängiger Gruppenparameter $\alpha(x)$.
- $\Rightarrow$ Die Lagrangedichte der QED unterliegt einer abelschen Eichsymmetrie

Philosopie oder physikalisches Prinzip?

Das physikalische Prinzip der Eichtheorie

Von der Philosopie zum physikalischen Prinzip:

- $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ ist NICHT invariant unter $U(1)$.
- Forderung: $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ soll invariant unter $U(1)$ ein.
- Erzwingt die Einführung eines masselosen Eichfeldes $A_\mu(x)$ (Photon): $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x) \to$ minimale Kopplungsregel
- ZusÃďtzlicher Term $(e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu) \to$ minimale Kopplung
- $\Rightarrow \mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ ist invariant unter $U(1)$
- !!! EinfÃijhrung eines Masseterms $m^2A_\mu A^\mu$ wÃijrde Eichsymmetrie brechen !!!

Das physikalische Prinzip der Eichtheorie

Von der Philosopie zum physikalischen Prinzip:

- $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$ ist NICHT invariant unter $U(1)$.
- Forderung: $\mathfrak{L}_{\text{Dirac}}$ soll invariant unter $U(1)$ ein.
- Erzwingt die Einführung eines masselosen Eichfeldes $A_{\mu}(x)$ (Photon): $\partial_{\mu} \to D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x) \to$ minimale Kopplungsregel
- ZusÃďtzlicher Term $(e\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}) \to$ minimale Kopplung
- $\Rightarrow \mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$ ist invariant unter $U(1)$
- !!! EinfÃijhrung eines Masseterms $m^2 A_{\mu}A^{\mu}$ wÃijrde Eichsymmetrie brechen !!!

Gruppentheorie

- Nicht abelsche Gruppe $SU(N)$.
- $U \in SU(N)$ mit $U(\alpha) = e^{i \sum_a^{N^2-1} \alpha^a(x) \hat{G}^a}$
- Gruppenparameter $\{\alpha^a(x)\}$
- Generatoren $\{\hat{G}^a\}$ der Liealgebra mit Lie-Klammer: $[\hat{G}^a, \hat{G}^b] = i f^{abc} \hat{G}^c$
- Strukturkonstante f^{abc}
- $U^\dagger U = 1$, det $U = 1 \Rightarrow \hat{G}^\dagger = \hat{G}$, $Tr(\hat{G}^a) = 0$

$U(1)$, abelsch

- $U(\alpha) = e^{i\alpha(x)}$
- $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$
- $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$
- $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ invariant unter Eichtransformation

$SU(N)$, nicht abelsch

- $U(\alpha) = e^{i\sum_a^{N^2-1} \alpha^a(x)\hat{G}^a}$
- $\hat{D}_\mu = \mathbb{1}\partial_\mu - ig\hat{G}^a A^a_\mu$
- $\left(\hat{G}^a A^a_\mu\right)' = U\hat{G}^a A^a_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U\right) U^\dagger$
- $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu(\hat{G}^a A^a_\nu) - \partial_\nu(\hat{G}^a A^a_\mu) - ig[\hat{G}^b A^b_\mu, \hat{G}^c A^c_\nu]$

Feldstärketensormatrix

- Ohne Beweis : $Tr\left(\hat{F}'_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu\prime}\right) = Tr\left(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}\right)$

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(\hat{G}^a A^a_\nu) - \partial_\nu(\hat{G}^a A^a_\mu) - ig[\hat{G}^b A^b_\mu, \hat{G}^c A^c_\nu] \\
&= \hat{G}^a\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\right) \\
&= \hat{G}^a F^a_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

- Ohne Beweis : $Tr\left(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu,a}$

QCD

Annahmen

- Quarks: 6 Flavours(u,d,c,s,t,b).
- Quarks tragen Farbladung.
- Jeder Flavour in drei Farben (rot,grün,blau) $\rightarrow SU(3)$
- Nachweis durch Experiment über $R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$
- Annahme: Quarks eines Flavours, jedoch in unterschiedlicher Farbe unterscheiden sich nicht in ihren Massen.
- $SU(3) \Rightarrow 3^2 - 1$ Generatoren $\Rightarrow$ 8 Eichfelder (Gluonen).
- Quarks sind Fermionen $\Rightarrow$ Diracgleichung. 3 Farben $\Rightarrow$ Spinorentriplet $\psi = \begin{pmatrix} \psi_\text{r} \\ \psi_\text{g} \\ \psi_\text{b} \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\hat{D}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$$

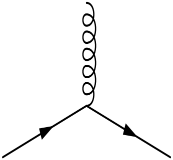
$$\hat{D}_{\mu} = \mathbb{1}_{3}\partial_{\mu} + ig_{s}\frac{\hat{\lambda}^{a}}{2}A^{a}_{\mu}$$

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} + g_{s}f^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}$$

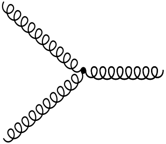
INVARIANT UNTER $SU(3)$: $U(\alpha) = e^{i\sum_{a}^{8}\alpha^{a}(x)\frac{\hat{\lambda}^{a}}{2}}$

Interessant :

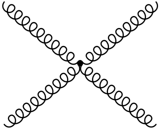
$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\mathrm{QCD}} &= \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_{int} \\
&= \mathfrak{L}_0 + g_s A^a_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi \\
&- g f^{abc} (\partial_\nu A^a_\mu) A^{\nu,b} A^{\mu,c} \\
&- \frac{1}{4} g_s^2 (f^{eab} A^a_\nu A^b_\mu)(f^{ecd} A^{\nu,c} A^{\mu,d})
\end{aligned}
$$



$$g_s A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi$$



$$-g f^{abc} (\partial_\nu A_\mu^a) A^{\nu,b} A^{\mu,c}$$



$$-\frac{1}{4} g_s^2 (f^{eab} A_\nu^a A_\mu^b)(f^{ecd} A^{\nu,c} A^{\mu,d})$$

- Entwickelt um 1962 von Weinberg, Salam und Glashow. $\rightarrow$ GWS-Theorie
- Vereinigte Eichtheorie aus der schwachen Wechselwirkung und der QED.
- Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Linkshändige Fermionen bilden schwaches Isodoublet

$$\text{Leptonen: } L = \psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

$$\text{Quarks: } q_L = \psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

, rechtshändige Fermionen schwaches Isosinglet:

$$R = e_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)e$$

$$u_R, d_R$$

Transformation unter $SU(2)_L$:

$$L \rightarrow L' = e^{i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}} L$$
$$R \rightarrow R' = R$$

Transformation unter $U(1)_Y$

$$L \rightarrow L' = e^{i\beta \frac{Y}{2}} L$$
$$R \rightarrow R' = e^{i\beta \frac{Y}{2}} R$$

Eichbosonen:

- $U(1)_Y$: Eichboson B, Kopplung g_1
- $SU(2)_L$: Eichbosonen W_1, W_2, W_3, Kopplung g_2

Versuch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \mathfrak{L}_F + \mathfrak{L}_G \\ &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu \hat{D}_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}D_\mu &= \partial_\mu - i\frac{g_1}{2}YB_\mu \\ \hat{D}_\mu &= \mathbb{1}_2(\partial_\mu - i\frac{g_1}{2}YB_\mu) - ig_2\frac{\sigma^a}{2}W^a_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Tolle Theorie:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu \hat{D}_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

Doch wo sind die Massen?

$$\frac{1}{2}M^2 B_\mu B^\mu \to \frac{1}{2}M^2\left(B_\mu - \frac{1}{g_2}\partial_\mu\beta(x)\right)\left(B^\mu - \frac{1}{g_2}\partial^\mu\beta(x)\right)$$

$$-m\bar{e}e = -m(\bar{e}_R e_L) + \bar{e}_L e_R)$$

$\Rightarrow$ Keine triviale Massenaddiation wegen $SU(2)_L$ Invarianzverletzung.

Tolle Theorie:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu \hat{D}_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

Doch wo sind die Massen?

$$\frac{1}{2}M^2 B_\mu B^\mu \rightarrow \frac{1}{2}M^2\left(B_\mu - \frac{1}{g_2}\partial_\mu\beta(x)\right)\left(B^\mu - \frac{1}{g_2}\partial^\mu\beta(x)\right)$$

$$-m\bar{e}e = -m(\bar{e}_R e_L) + \bar{e}_L e_R)$$

$\Rightarrow$ Keine triviale Massenaddiation wegen $SU(2)_L$ Invarianzverletzung.

Glashow: 'It is a stumbling block we must overlook'

Tolle Theorie:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \hat{D}_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Doch wo sind die Massen?

$$\frac{1}{2} M^2 B_\mu B^\mu \rightarrow \frac{1}{2} M^2 \left(B_\mu - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \beta(x) \right) \left(B^\mu - \frac{1}{g_2} \partial^\mu \beta(x) \right)$$

$$-m\bar{e}e = -m(\bar{e}_R e_L) + \bar{e}_L e_R)$$

$\Rightarrow$ Keine triviale Massenaddiation wegen $SU(2)_L$ Invarianzverletzung.
Glashow: 'It is a stumbling block we must overlook'
$\rightarrow$ Higgsmechanismus

Tolle Theorie:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \hat{D}_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Doch wo sind die Massen?

$$\frac{1}{2} M^2 B_\mu B^\mu \rightarrow \frac{1}{2} M^2 \left(B_\mu - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \beta(x) \right) \left(B^\mu - \frac{1}{g_2} \partial^\mu \beta(x) \right)$$

$$-m\bar{e}e = -m(\bar{e}_R e_L) + \bar{e}_L e_R)$$

$\Rightarrow$ Keine triviale Massenaddiation wegen $SU(2)_L$ Invarianzverletzung.
Glashow: 'It is a stumbling block we must overlook'
$\rightarrow$ Higgsmechanismus

$$\mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}_{T} - \underbrace{\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4}_{V(\phi)}$$

Reflektionssymmetrie $\phi \to -\phi$.
Betrachte Potential $V(\phi)$:

- $\mu^2, \lambda > 0 \Rightarrow \phi_{min} = 0$
- $\mu^2 < 0, \lambda > 0 \Rightarrow \phi_{min} = \phi_{\text{min}} = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} =: \pm v$

$$\mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}_{T} - \underbrace{\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4}_{V(\phi)}$$

Reflektionssymmetrie $\phi \to -\phi$.
Betrachte Potential $V(\phi)$:

- $\mu^2, \lambda > 0 \Rightarrow \phi_{min} = 0$
- $\mu^2 < 0, \lambda > 0 \Rightarrow \phi_{min} = \phi_{\mathrm{min}} = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} =: \pm v$

FÃijr $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ Wahl eines Minimums, zum Beispiel $\phi = +v$.
Das Feld $\phi(x)$ wird so verschoben, dass der Grundzustand eines neuen Feldes $\eta(x)$ bei Null liegt:

$$\phi(x) \to \eta(x) + v$$

$$\mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}_{T} - \underbrace{\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4}_{V(\phi)}$$

Reflektionssymmetrie $\phi \to -\phi$.
Betrachte Potential $V(\phi)$:

- $\mu^2, \lambda > 0 \Rightarrow \phi_{min} = 0$
- $\mu^2 < 0, \lambda > 0 \Rightarrow \phi_{min} = \phi_{\text{min}} = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} =: \pm v$

FÃijr $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ Wahl eines Minimums, zum Beispiel $\phi = +v$.
Das Feld $\phi(x)$ wird so verschoben, dass der Grundzustand eines neuen Feldes $\eta(x)$ bei Null liegt:

$$\phi(x) \to \eta(x) + v$$

$$\phi(x) \to \eta(x) + v$$

Bis auf konstante Terme:

$$\mathfrak{L}' = \frac{1}{2}\partial_\mu \eta(x)\partial^\mu \eta(x) - v^2\lambda\eta^2(x) - v\lambda\eta^3(x) - \frac{1}{4}\lambda\eta^4(x) \qquad (1)$$

- Massenterm $v^2\lambda\eta^2(x)$ hat korrektes Vorzeichen.
- Verlust der Reflektionssymmetrie $\eta(x) \to -\eta(x)$ wegen $\eta^3(x)$ Term
- $\Rightarrow$ spezielle Wahl des Grundzustandes bricht die Symmetrie
- Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung

Spontane Symmetriebrechung einer Eichsymmetrie: Higgsmechanismus

Kopplung eines Eichfeldes an das Higgsboson

Lokale U(1) invarianz:

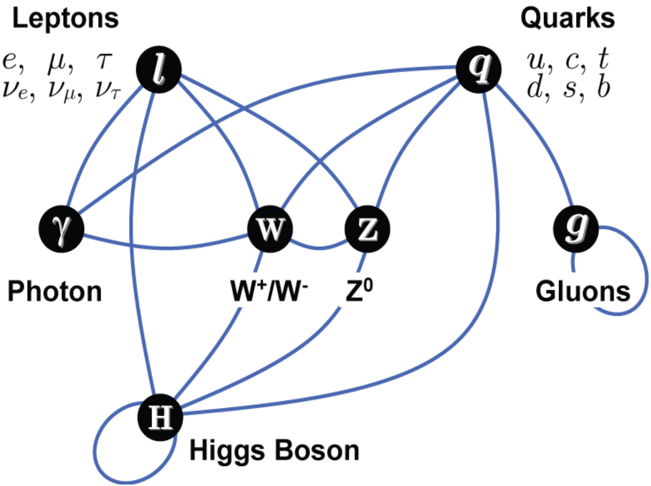
$$\mathfrak{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

- Spontane Symmetriebrechung durch Wahl eines bestimmten Minimums. $\phi_{\text{min}} = e^{i\alpha(x)} |\phi_{\text{min}}|$, $|\phi_{\text{min}}| = v$

$$\mathfrak{L}' = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} m_\eta^2 \eta^2 + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$+\text{Wechselwirkungsterme}$$


Leptons
e, μ, τ
νe, νμ, ντ
l
Quarks
q
u, c, t
d, s, b
γ
W
Z
g
Photon
W+/W-
Z0
Gluons
H
Higgs Boson

Kleine Anmerkung

- ZusÃďtzlicher Freiheitsgrad ?
- Goldstoneboson wird vom Vektorfeld absorbiert durch spezielle Parametrisierung des Skalarfeldes ψ
- Photonen masselos $\Rightarrow$ brauchen invariante Untergruppe der $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Spontaner Symmetriebruch der $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Kochrezept

- Higgsdoublet $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{pmatrix}$.
- Kopplung der Fermionen(Yukawakopplung) und Eichbosonen an das Higgsdoublet.
- Wähle Vakuumserwartungswert, sodass die Untergruppe $U(1)_Q$ ungebrochen bleibt.

Eichbosonen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{gauge} &= (\hat{D}_\mu \phi)^\dagger \hat{D}^\mu \phi - V(\psi^\dagger \psi) - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\
V(\psi^\dagger \psi) &= \mu^2 \psi^\dagger \psi + \lambda (\psi^\dagger \psi)^2 \\
W^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_2 \epsilon_{ijk} W^j_\mu W^k_\nu \\
B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\
\hat{D}_\mu &= \mathbb{1}_2 (\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} Y B_\mu) - i g_2 \frac{\sigma^a}{2} W^a_\mu
\end{aligned}$$

Wähle Vakuumserwartungswert:

$$< \phi >= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

- Beseitige Goldstonebosonen durch *unitäre* Eichung:

$$\phi \to \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

- Relevante Terme:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{gauge} = & \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m^2 h^2 - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{8} v^2 g_2^2 \left(W^1_\mu W^{\mu,1} + W^2_\mu W^{\mu,2} \right) \\ & + \frac{1}{8} v^2 \left(g_2^2 W^3_\mu W^{\mu,3} + g_1^2 B_\mu B^\mu - 2 g_1 g_2 W^3_\mu W_\mu \right) \\ & + \text{WW Terme} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8}v^2\left(g_2^2 W_\mu^3 W^{\mu,3} + g_1^2 B_\mu B^\mu - 2g_1 g_2 W_\mu^3 W_\mu\right) =$$
$$\frac{1}{8}v^2\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

Massenmatrix hermitisch $\Rightarrow$ Eigenvektoren orthogonal.
Eigenvektoren bilden Photon A_μ und Z-Boson Z_μ :

$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B^\mu, \text{ Eigenwert } M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$
$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B^\mu, \text{ Eigenwert } M_\gamma = 0$$